

1 Produit de matrices

Exercice 1 ★ Identité remarquable –

Soit $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ les matrices définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Puis comparer les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3029]

Exercice 2 ★ Commutant d'une matrice fixée –

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3030]

Exercice 3 ★ Commutant –

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[911]

Exercice 4 ★ Produit non commutatif –

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[913]

Exercice 5 ★ Produit égal à l'identité –

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Existe-t-il une matrice $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_3$? Si oui, donner explicitement une telle matrice B .
2. Existe-t-il une matrice $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $CA = I_2$? Si oui, donner explicitement une telle matrice C .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3031]

Exercice 6 ★★ Matrices stochastiques –

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que la somme des coefficients sur chaque colonne de A et sur chaque colonne de B vaut 1 (on dit qu'une telle matrice est une matrice stochastique). Montrer que la somme des coefficients sur chaque colonne de AB vaut 1.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2372]

Exercice 7 ★★★★★ Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. –

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[917]

2 Puissance de matrices

Exercice 8 ★ Puissance n -ième –

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3 . En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$. Répondre aux mêmes questions pour B .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1018]

Exercice 9 ★★ Puissance n -ième - avec la formule du binôme –

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[914]

Exercice 10 ★★★ Puissance k -ième sans division euclidienne –

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4 .
2. Soit (α_k) et (β_k) les suites définies par $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \alpha_{k+1} = 3\beta_k, \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k$. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2387]

Exercice 11 ★★★ Puissance n -ième - avec un polynôme annulateur –

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n , pour $n \geq 2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[915]

Exercice 12 ★★★ Puissance k -ième –

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation simple liant I_4, U et U^2 .
2. En déduire, pour $k \geq 0$, la valeur de U^k .

Exercice 13 ★★ **Produit et somme de matrices nilpotentes –**

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$, alors AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Indication ▼ Correction ▼

[3117]

3 Inverse de petites matrices**Exercice 14** ★ **Annulateur –**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB ,

AC . Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Indication ▼ Correction ▼

[912]

Exercice 15 ★ **Inverser une matrice à partir d'une égalité –**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1} .

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} .

Indication ▼ Correction ▼

[921]

Exercice 16 ★ **Inverse avec calculs ! –**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication ▼ Correction ▼

[922]

Exercice 17 ★ **Une famille de matrices –**

Pour tout couple (a, b) de \mathbb{R}^2 , on pose $A(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Calculer $A(ac, -bc)A(a, b)$.

2. Pour quels couples (a, b) la matrice A est-elle inversible ? Si elle l'est, donner son inverse.

Indication ▼ Correction ▼

[3036]

Exercice 18 ★★ **Inversible ? –**

Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet-elle un inverse ? On ne demande pas de calculer l'inverse.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3037]

Exercice 19 ★★ Inverse à paramètres –

Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2871]

Exercice 20 ★ Inverse et résolution de système –

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
2. En déduire les solutions du système

$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3118]

4 Inverse de grandes matrices

Exercice 21 ★★ Grand inverse –

Démontrer que la matrice suivante est inversible, et calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[923]

Exercice 22 ★★ Matrice nilpotente –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1019]

Exercice 23 ★★★★★ Matrices stochastiques –

Pour $n \geq 1$, on note \mathcal{D} l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j et

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

pour tout $i = 1, \dots, n$.

1. Démontrer que \mathcal{D} est stable par produit.

2. Déterminer les matrices A de \mathcal{D} qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[926]

5 Application des matrices

Exercice 24 ★★ Application à l'étude de suites récurrentes –

On considère les matrices

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que P est inversible, et déterminer son inverse.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .
3. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.
4. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On en déduit que pour tout entier n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

(on ne demande pas de faire le calcul, mais vous pouvez vérifier vos résultats en calculant quelques coefficients).

5. On considère les trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0 , v_0 et w_0 des réels, par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + w_n}{2} \\ w_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Quelle relation matricielle relie U_{n+1} , U_n et A ? En déduire l'expression de U_n en fonction de A^n et de U_0 .

6. Démontrer que les trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) convergent, et en déduire leur limite.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3038]

Exercice 25 ★★ Matrices et suites –

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n , et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p \geq 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[930]

Exercice 26 Modèle proie-prédateur –

Dans un étang se trouvent deux populations de poissons : des gardons et des brochets. Le brochet est un prédateur naturel du gardon. Sa population d'une année sur l'autre varie donc en fonction

du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (reproduction) du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (proies).

De la même façon, la population du gardon évolue en fonction

du nombre de gardons déjà présents dans l'étang (reproduction) du nombre de brochets déjà présents dans l'étang (prédateurs).

Au premier janvier 2021, on relève 1000 gardons et 100 brochets dans l'étang. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note g_n , respectivement b_n , le nombre de gardons, resp. de brochets, au 1er janvier de l'année 2021+n.

1. Partie 1. Après une étude, des biologistes ont déterminé que les suites (g_n) et (b_n) vérifient les relations de récurrence croisées suivantes :

$$\begin{cases} g_{n+1} &= 1,1g_n - 0,2b_n \\ b_{n+1} &= 0,4g_n + 0,5b_n. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} g_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et on note A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,2 \\ 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation lie U_n , U_{n+1} et A ? En déduire une relation entre U_n , A et U_0 . Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} . On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D . Calculer D^n pour tout $n \geq 1$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle relation lie U_n , U_{n+1} et A ? En déduire une relation entre U_n , A et U_0 .

3. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .

4. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .

5. Calculer D^n pour tout $n \geq 1$.

6. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

7. En déduire l'expression de g_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite des deux suites (g_n) et (b_n) ? Quelle interprétation en faites-vous?

8. Partie 2. Pour enrayer l'extinction des espèces, on décide de relâcher chaque année 30 gardons dans l'étang. Dans cette deuxième modélisation, les deux suites (g_n) et (b_n) vérifient donc maintenant les relations

$$\begin{cases} g_{n+1} &= 1,1g_n - 0,2b_n + 30 \\ b_{n+1} &= 0,4g_n + 0,5b_n. \end{cases}$$

de sorte que, en gardant les mêmes notations, on a $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse. On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0 . On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n) . Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas? Interpréter...

9. Démontrer que la matrice $(A - I_2)$ est inversible et calculer son inverse.

10. On pose $C = (A - I_2)^{-1}B$. Calculer explicitement C .

11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_n + C$. Vérifier que $V_{n+1} = AV_n$.

12. Exprimer V_n en fonction de A^n et V_0 . On note (x_n) et (y_n) les deux suites telles que $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer les limites des deux suites (x_n) et (y_n) .

13. Quelles sont les limites des suites (g_n) et (b_n) dans ce cas? Interpréter... Cet exercice est inspiré de travaux réels réalisées à la fin du XIX^e siècle par deux spécialistes de la dynamique des populations : l'italien Vito Volterra et de l'américain James Lotka.

Exercice 27 ★★★★★ **Matrice et systèmes linéaires –**

Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ trois fonctions continues sur I , à valeurs réelles, et pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_1, a_2, a_3 non tous nuls tels que la fonction

$$\theta = a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 \theta_3$$

admette au moins trois racines distinctes x_1, x_2, x_3 . Prouver qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 \theta_k(x_1) + \lambda_2 \theta_k(x_2) + \lambda_3 \theta_k(x_3) = 0,$$

pour $k = 1, 2$ ou 3 .

Indication pour l'exercice 1 ▲

Indication pour l'exercice 2 ▲

Prendre une matrice B 2×2 quelconque, et calculer les produits AB et BA .

Indication pour l'exercice 3 ▲

Prendre une matrice B 2×2 quelconque, et calculer les produits AB et BA .

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

Supposer l'existence d'une telle matrice, lui donner des coefficients a, b, c, \dots faire le produit et identifier.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Poser $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $C = AB = (c_{i,j})$. Calculer $c_{i,j}$ en fonction des $a_{i,j}$ et des $b_{i,j}$, faire la somme. Il apparaît deux sommes, les permuter.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Multiplier par les matrices élémentaires.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Calculer les premières puissances pour deviner la formule donnant A^n ou B^n . Démontrer cette formule par récurrence.

Indication pour l'exercice 9 ▲

Commencer par calculer B^2 , B^3 , etc... Pour calculer A^n , on peut utiliser la formule du binôme de Newton car B et I commutent.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. $U^2 = 2U + 3I_4$.
 2. Procéder par récurrence. On pourra remarquer qu'on nous demande de démontrer que $U^k = \beta_k U + \alpha_k I_4$.
 - 3.
 4. Suite récurrente linéaire d'ordre deux : on doit introduire l'équation caractéristique...
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

1. Écrire la formule donnée par la division euclidienne, et évaluer-la en les racines de $X^2 - 3X + 2$.
 2. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. $U^2 = 2U + 3I_4$.
 2. Effectuer la division euclidienne de X^k par $X^2 - 2X - 3$, puis évaluer en U .
-

Indication pour l'exercice 13 ▲

Pour $A + B$, appliquer la formule du binôme à l'ordre $p + q$, où $A^p = 0$ et $B^q = 0$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

On doit trouver $AB = AC$. Supposer A inversible, et multiplier par A^{-1} .

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Écrire $\frac{A^2+A}{2} = I_3$, et factoriser.
 2. Écrire $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$ et factoriser
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

Utiliser la méthode du pivot de Gauss.

Indication pour l'exercice 17 ▲

On pourra discuter suivant que $a^2 + b^2 = 0$ ou non (ce qui revient à $a = 0$ et $b = 0$).

Indication pour l'exercice 18 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss.

Indication pour l'exercice 19 ▲

Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss et discuter suivant la valeur de t .

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Utiliser la méthode du pivot de Gauss.
 2. Passer par l'écriture matricielle du système.
-

Indication pour l'exercice 21 ▲

Appliquer la méthode du pivot de Gauss.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Penser aux sommes de suites géométriques.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Permuter deux sommes !
 2. Supposer que A admet un inverse B , calculer le coefficient d'ordre (i, j) de BA , et en déduire que chaque ligne de A admet au plus un coefficient non nul.
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. S'inspirer de l'écriture matricielle d'un système.
 2. Montrer que $N^p = 0$ pour $p \geq 3$.
 3. Ecrire $A = 3I + N$, puis procéder par récurrence, ou bien appliquer la formule du binôme de Newton.
 4. Utiliser 1. et 3.
-

Indication pour l'exercice 26 ▲

Indication pour l'exercice 27 ▲

Écrire la condition d'annulation de θ en x_1, x_2, x_3 sous la forme d'une matrice dont les colonnes sont liées. Que dire des lignes de cette matrice ?

Correction de l'exercice 1 ▲

On effectue les divers calculs, et on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est fautive pour les matrices. En revanche l'égalité $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, qu'on prouve par double distributivité, est vraie pour toutes les matrices carrées A et B .

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} c+e & d+f \\ e & f \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} c & c+d \\ e & e+f \end{pmatrix}.$$

Puisque $AB = BA$, on obtient le système :

$$\begin{cases} c+e = c \\ d+f = c+d \\ f = e+f \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ac & bc+ad \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$

On a donc $AB = BA$ si et seulement si

$$\begin{cases} ac+be = ac \\ ad+bf = bc+ad \\ af = be+af \end{cases}$$

On résout ce système (dont les inconnues sont c , e et f). Il est équivalent à

$$\begin{cases} be = 0 \\ b(f-c) = 0 \\ be = 0 \end{cases}$$

Comme $b \neq 0$, on trouve que le système est équivalent à $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont donc celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conviennent.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ que l'on écrit

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Le produit AB vaut

$$AB = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}.$$

Si on avait $AB = I_3$, on aurait en particulier $d = 1$, $a = 0$ et $a + d = 0$. C'est impossible !

2. Soit $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ que l'on écrit

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Alors le produit CA vaut

$$CA = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ e+f & d+f \end{pmatrix}.$$

On a $CA = I_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} b+c = 1 \\ a+c = 0 \\ e+f = 0 \\ d+f = 1 \end{cases}$$

On résout ce système qui est équivalent à

$$\begin{cases} a = -c \\ b = 1-c \\ e = -f \\ d = 1-f \end{cases}.$$

Ce système admet donc des solutions et on peut trouver des matrices C qui conviennent, par exemple

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $C = AB = (c_{i,j})$. Alors, par définition, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

On veut démontrer que, pour tout $j = 1, \dots, n$, on a

$$\sum_{i=1}^n c_{i,j} = 1.$$

Calculons cette somme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_{i,j} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,j} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k} \right). \end{aligned}$$

La somme à l'intérieur est égale à 1 puisque A est stochastique. Il reste

$$\sum_{i=1}^n c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{k,j} = 1$$

où on utilise cette fois que B est stochastique.

Correction de l'exercice 7 ▲

Remarquons d'abord que si $A = \lambda I_n$, alors A commute avec toutes les matrices et donc A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, supposons que A commute avec toutes les matrices, et étudions ce que donne $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec des 0 partout sauf le coefficient à la i -ème ligne et j -ième colonne qui est égal à 1. Alors,

$$AE_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,i} & 0 \\ \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 \\ \dots & & & & \end{pmatrix}$$

où la seule colonne non-nulle est la j -ième colonne, et

$$E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où la seule ligne non-nulle est la i -ème ligne. Le seul terme (éventuellement) non-nul que peuvent avoir en commun les deux matrices est situé sur la i -ème ligne et la j -ième colonne. Les coefficients correspondants doivent être égaux et donc on doit avoir

$$a_{i,i} = a_{j,j}.$$

Les autres coefficients doivent être nuls, ce qui signifie en particulier, pour $k \neq i$, que $a_{k,i} = 0$. Ainsi, A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux doivent être égaux. On en déduit que $A = \lambda I_n$.

Correction de l'exercice 8 ▲

On va commencer par calculer les premiers termes de A^n pour essayer de deviner la formule. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On démontre alors par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

La preuve par récurrence est très simple, et repose simplement sur le fait que $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$. On fait la même chose pour B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On démontre alors, par récurrence sur n , que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On commence par calculer les premières valeurs de B^n . On a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, on a $B^n = 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 3$. Si c'est vrai au rang $n \geq 3$, alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = 0 \times B = 0.$$

Pour obtenir A , on écrit $A = I + B$ et on remarque que I et B commutent puisque $IB = BI = B$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton, ce qui est très facile ici puisque $B^n = 0$ dès que $n \geq 3$. On en déduit

$$A^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1} B + \binom{n}{2} I^{n-2} B^2$$

ce qui se réécrit en

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2.$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. On va raisonner par récurrence. Elle n'est pas si simple, et on peut remarquer que ce que l'on nous demande de démontrer est que, pour tout $k \geq 0$, $U^k = \beta_k U + \alpha_k I_4$. Pour $k \geq 0$, notons donc $\mathcal{P}(k)$ la propriété

$$\mathcal{P}(k) = " U^k = \alpha_k I_4 + \beta_k U "$$

On va prouver que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée pour tout $k \geq 0$. En effet,

$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont clairement vérifiées, avec $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$. Soit $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée et prouvons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a

$$U^{k+1} = U^k \times U = (\alpha_k I_4 + \beta_k U) \times U = \alpha_k U + \beta_k U^2.$$

Utilisant la relation $U^2 = 3I + 2U$, on en déduit que

$$U^{k+1} = 3\beta_k I_4 + (\alpha_k + 2\beta_k)U = \alpha_{k+1} I_4 + \beta_{k+1} U.$$

La propriété est bien démontrée au rang $k+1$.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier naturel k .

3. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont clairement vérifiées, avec $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$.

4. Soit $k \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vérifiée et prouvons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a

$$U^{k+1} = U^k \times U = (\alpha_k I_4 + \beta_k U) \times U = \alpha_k U + \beta_k U^2.$$

Utilisant la relation $U^2 = 3I + 2U$, on en déduit que

$$U^{k+1} = 3\beta_k I_4 + (\alpha_k + 2\beta_k)U = \alpha_{k+1} I_4 + \beta_{k+1} U.$$

La propriété est bien démontrée au rang $k+1$.

5. Il suffit d'écrire

$$\beta_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\beta_{k+1} = 3\beta_k + 2\beta_{k+1}.$$

6. On a affaire à une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Pour déterminer le terme général d'une telle suite, on introduit l'équation caractéristique $r^2 = 2r + 3$, dont les racines sont -1 et 3 . On sait alors qu'il existe deux constantes a et b telles que, pour tout $k \geq 0$, on a $\beta_k = a(-1)^k + b3^k$. On détermine a et b en sachant que $\beta_0 = 0$ et $\beta_1 = 1$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 0 &= a + b \\ 1 &= -a + 3b \end{cases}$$

La résolution de ce système donne le résultat souhaité, et on en déduit très aisément l'expression de α_k .

Correction de l'exercice 11 ▲

1. On sait que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_n X + b_n,$$

où $a_n X + b_n$ est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Pour trouver la valeur de a_n et b_n , on évalue l'égalité précédente en les racines de $X^2 - 3X + 2$, c'est-à-dire en 1 et 2. On trouve le système :

$$\begin{cases} a_n + b_n &= 1 \\ 2a_n + b_n &= 2^n \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.

2. Il suffit de remarquer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. Remplaçant dans l'expression de la division euclidienne, on trouve

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. Pour $k \geq 1$, effectuons la division euclidienne de X^k par le polynôme $X^2 - 2X - 3$ (qui est un polynôme annulateur de U). Alors il existe deux réels α_k et β_k et un polynôme Q_k tels que

$$X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k.$$

On détermine α_k et β_k en évaluant cette égalité en les racines de $X^2 - 2X - 3$, c'est-à-dire en -1 et en 3 . On trouve les deux relations :

$$\begin{cases} (-1)^k &= -\beta_k + \alpha_k \\ 3^k &= 3\beta_k + \alpha_k. \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\beta_k = \frac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \frac{3^{k+3} - (-1)^k}{4}$. Maintenant, du fait que $U^2 - 2U - 3I = 0$, l'égalité $X^k = (X^2 - 2X - 3)Q_k(X) + \beta_k X + \alpha_k$ donne $U^k = \beta_k U + \alpha_k I_4$. On a donc, pour tout $k \geq 0$,

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}$$

où les suites (α_k) et (β_k) ont été déterminées précédemment.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $A^p = 0$ et $B^q = 0$. Posons $r = \max(p, q)$. Alors, puisque A et B commutent, on a

$$(AB)^r = A^r B^r = A^p \cdot A^{r-p} \cdot B^q \cdot B^{r-q} = 0$$

(on pourrait même choisir $r = \min(p, q)$ comme ordre de nilpotence). Pour démontrer que $A + B$ est nilpotente, appliquons la formule du binôme de Newton à l'ordre $p + q$. Il vient

$$(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.$$

Mais si $k \geq p$, on a $A^p = 0$ et si $k < p$, alors $-k > -p$ et $p + q - k > q$ donc $B^{p+q-k} = 0$. Dans tous les cas, si $k \in \{0, \dots, p + q\}$, on a $A^k B^{p+q-k} = 0$ et donc $(A + B)^{p+q} = 0$.

Correction de l'exercice 14 ▲

On trouve :

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas inversible : si tel était le cas, on multiplierait à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB = AC$, et on trouverait $B = C$. Ce n'est pas le cas ! Pour la seconde partie, on considère F une matrice vérifiant les propriétés précitées :

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Le calcul de AF donne :

$$AF = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}.$$

Puisque $AF = 0$, on a le système suivant :

$$\begin{cases} a = b = c = 0 \\ d + g = e + h = f + i = 0 \\ 3a + d + g = 3b + e + h = 3c + f + i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = c = 0 \\ d = -g \\ e = -h \\ f = -i \end{cases}$$

Les matrices F recherchées sont donc les matrices de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :

$$\frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3 \implies A \left(\frac{1}{2}(A + I_3) \right) = \left(\frac{1}{2}(A + I_3) \right) A = I_3.$$

A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{1}{2}(A + I_3).$$

2. Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. On réécrit ceci en :

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A \left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3) \right) = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est $\frac{-1}{2}(A - 3I_3)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

On utilise la méthode du pivot de Gauss. Commençons par A .

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_2 - L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_3 + L_2 \rightarrow L_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparaît à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que A est inversible. On trouve son inverse en

poursuivant la méthode.

$$\begin{array}{l}
 \frac{-1}{4}L_3 \rightarrow L_3 \\
 L_1 - 2L_3 \rightarrow L_1 \\
 L_2 + L_3 \rightarrow L_2 \\
 L_1 - L_2 \rightarrow L_1
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right.$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$\left(\begin{array}{ccc} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} \right).$$

On suit la même méthode pour B . On forme

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 L_2 \rightarrow L_1 \\
 L_1 \rightarrow L_2 \\
 L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparaît à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que B est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$\begin{array}{l}
 L_1 + 2L_3 \rightarrow L_1 \\
 L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2 \\
 -L_3 \rightarrow L_3 \\
 L_1 - L_2 \rightarrow L_1
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right.$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Passons à C :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 L_1 \\
 L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\
 L_3 - 3L_1 \rightarrow L_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 L_1 \\
 L_2 \\
 L_3 - 2L_2 \rightarrow L_3
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right.$$

La matrice C n'est donc pas inversible. Étudions maintenant I :

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -1 & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_3 \rightarrow L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & 2i & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ L_1 \rightarrow L_2 \\ L_2 \rightarrow L_3 \\ L_2 + iL_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + 2L_1 \rightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

La matrice I est donc inversible. Pour calculer son inverse, on poursuit la méthode :

$$\begin{array}{l} L_3/4 \rightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right) \\ L_1 - L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - 3iL_3 \rightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3i/4 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right) \\ -L_1 \rightarrow L_1 \\ -L_2 \rightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array} \right) \end{array}$$

L'inverse de I est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

Un rapide calcul donne

$$A(ac, -bc)A(a, b) = \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2)c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si $a^2 + b^2 \neq 0$, la matrice $A(a, b)$ est inversible, et son inverse est la matrice $A(ac, -bc)$ avec $c = 1/(a^2 + b^2)$. Réciproquement, si $a^2 + b^2 = 0$, c'est-à-dire si $a = 0$ et $b = 0$ (la somme de deux carrés est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul), alors la matrice $A(0, 0)$ n'est pas inversible : elle est échelonnée, avec deux coefficients nuls sur la diagonale.

Correction de l'exercice 18 ▲

On applique la méthode du pivot de Gauss, mais inutile d'utiliser la matrice augmentée puisqu'on ne demande pas de calculer l'inverse. On trouve successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

La matrice est donc inversible si et seulement si $m - 1 \neq 0$ et $2 - m - m^2 \neq 0$. Les solutions des équations $m - 1 = 0$ et $m^2 + m - 2 = 0$ étant les réels 1 et -2 , la matrice est inversible si et seulement si $m \notin \{-2, 1\}$.

Correction de l'exercice 19 ▲

On utilise la matrice augmentée.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 & \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ L_3 - L_2 \rightarrow L_3 & \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2t & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Si $t = -1/2$, alors la matrice à gauche est triangulaire, mais un de ses coefficients sur la diagonale est nulle : la matrice n'est pas inversible. Sinon, la matrice est inversible. On continue l'application de la méthode du pivot de Gauss pour déterminer son inverse.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2t}L_3 \rightarrow L_3 & \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2t & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array} \right) \\ L_1 - tL_3 \rightarrow L_1 & \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array} \right) \\ L_2 + 2tL_3 \rightarrow L_2 & \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On a donc prouvé que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+2t} & \frac{t}{1+2t} & \frac{-t}{1+2t} \\ \frac{-2}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} & \frac{2t}{1+2t} \\ \frac{2}{1+2t} & \frac{-1}{1+2t} & \frac{1}{1+2t} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 + 2L_1 \rightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 L_3 - 3L_2 \rightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right) \\
 -L_3 \rightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right) \\
 \begin{array}{l} L_1 + L_3 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3 \rightarrow L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

On obtient donc que M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Écrivons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$. Alors l'écriture matricielle du système est $MX = B$ qui admet une unique solution, $X = M^{-1}B = \begin{pmatrix} 5m-1 \\ -2m+1 \\ 4m-1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 21 ▲

On remarque que la matrice est triangulaire supérieure et que tous ses coefficients sur la diagonale sont non nuls. Elle est donc inversible. Pour calculer son inverse, on utilise la méthode du pivot de Gauss, même si c'est un peu plus compliqué car on a une matrice de taille n . Cela dit, elle est déjà triangulaire supérieure. On commence par retirer la dernière ligne aux autres lignes, et on trouve :

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right)$$

On retire ensuite l'avant-dernière ligne à toutes les lignes la précédant. On trouve

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right)$$

On continue ainsi, et on fait apparaître des -1 juste au dessus de la diagonale, et rien ailleurs. L'inverse de A est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ce qu'on peut facilement vérifier en faisant le produit de A et de cette matrice.

Correction de l'exercice 22 ▲

L'idée est que, si $-1 < x < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

La même chose va se produire pour les matrices grâce au fait que $A^p = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (I_n - A)(I_n + A + \dots + A^{p-1}) &= I_n - A + A - A^2 + A^2 + \dots + A^{p-1} - A^p \\ &= I_n - A^p \\ &= I_n. \end{aligned}$$

On en déduit que $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n + A + \dots + A^{p-1}$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de \mathcal{D} et soit $C = AB$ leur produit. Alors, clairement on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$$

car tout est positif. De plus, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \sum_{j=1}^n b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Supposons que $A \in \mathcal{D}$ est inversible d'inverse $B \in \mathcal{D}$. Soient $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$. Alors le calcul du coefficient en (i, j) de BA donne

$$\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} = 0.$$

Tous les termes étant positifs, ils sont tous nuls. On a donc, pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$,

$$b_{i,k} a_{k,j} = 0.$$

Fixons k dans $\{1, \dots, n\}$. La matrice B étant inversible, sa k -ième colonne n'est pas nulle, et il existe i de $\{1, \dots, n\}$ tel que $b_{i,k} \neq 0$. Alors on a $a_{k,j} = 0$ pour tout $j \neq i$. Autrement dit, la matrice A a au plus un coefficient non nul dans sa k -ième ligne. Mais la somme des éléments de chaque ligne de A valant 1, ce coefficient vaut forcément 1. Ainsi, A est une matrice n'ayant qu'un seul 1 sur chaque ligne. La matrice A étant inversible, ces 1 sont sur chaque ligne dans une colonne différente. A est ce que l'on appelle une matrice de permutation. Réciproquement, il est clair qu'une telle matrice est élément de \mathcal{D} , est inversible et que son inverse est élément de \mathcal{D} .

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Par la méthode du pivot de Gauss, on prouve facilement que P est inversible et que son inverse est donné par

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Après un petit calcul on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Par récurrence, ou parce que l'on connaît la formule donnant la puissance n -ième d'une matrice diagonale, on trouve

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix}.$$

4. On remarque que $D = P^{-1}AP \iff PDP^{-1} = A$ en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} . Il vient ensuite par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. On a $U_{n+1} = AU_n$ d'où l'on déduit, par une récurrence immédiate, que $U_n = A^n U_0$.

6. On a par exemple

$$u_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) u_0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) v_0 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) w_0.$$

Puisque la suite $((-1/2)^n)$ tend vers 0, on déduit des règles habituelles concernant les limites de suites que (u_n) converge vers $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$. Il en est de même de (v_n) et (w_n) (par exemple, par symétrie de l'expression de ces suites).

Correction de l'exercice 25 ▲

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $X_{n+1} = AX_n$, et par récurrence on en déduit que $X_n = A^n X_0$.

2. On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $p \geq 3$, on a alors $N^p = N^3 \cdot N^{p-3} = 0$.

3. Écrivons que $A = 3I + N$, et remarquons que les matrices $3I$ et N commutent. Il est possible d'appliquer la formule du binôme, qui est très simple puisque $N^p = 0$ dès que $p \geq 3$. On obtient exactement le résultat demandé (il était également possible de procéder par récurrence).

4. On a donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_n &= 3^n + 2 \times 3^{n-1}n + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n &= 2 \times 3^n + 7 \times 3^{n-1}n \\ c_n &= 7 \times 3^n. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On a $U_{n+1} = AU_n$. Par une récurrence immédiate, on déduit que $U_n = A^n U_0$. Par un calcul facile, on vérifie que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$. Par récurrence, ou parce qu'on connaît la formule pour les puissances de matrices diagonales, on obtient

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}.$$

On part de la relation $D = P^{-1}AP$. En multipliant à gauche par P , et à droite par P^{-1} , on trouve que $A = PDP^{-1}$. On démontre alors la relation par récurrence. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que \mathcal{P}_n est vraie. Alors on a

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1}APD^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$. Par un calcul facile, on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2 \cdot 0,9^n - 2 \cdot 0,7^n & -0,9^n + 2 \cdot 0,7^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} g_n &= (2 \cdot 0,9^n - 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 0,7^n) \times 100 \\ b_n &= (2 \cdot 0,9^n - 2 \cdot 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 2 \cdot 0,7^n) \times 100. \end{cases}$$

Puisque les suites $(0,9^n)$ et $(0,7^n)$ tendent vers 0, on en déduit que les suites (g_n) et (b_n) tendent toutes deux vers 0. Les espèces vont s'éteindre !

2. On a $U_{n+1} = AU_n$. Par une récurrence immédiate, on déduit que $U_n = A^n U_0$.

3. Par un calcul facile, on vérifie que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On a $D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

5. Par récurrence, ou parce qu'on connaît la formule pour les puissances de matrices diagonales, on obtient

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}.$$

6. On part de la relation $D = P^{-1}AP$. En multipliant à gauche par P , et à droite par P^{-1} , on trouve que $A = PDP^{-1}$. On démontre alors la relation par récurrence. Pour $n \geq 1$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que \mathcal{P}_n est vraie. Alors on a

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1}APD^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

7. Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 1$.

8. Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que \mathcal{P}_n est vraie. Alors on a

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1}APD^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

9. Par un calcul facile, on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0,9^n - 0,7^n & -0,9^n + 0,7^n \\ 2 \cdot 0,9^n - 2 \cdot 0,7^n & -0,9^n + 2 \cdot 0,7^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} g_n &= (2 \cdot 0,9^n - 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 0,7^n) \times 100 \\ b_n &= (2 \cdot 0,9^n - 2 \cdot 0,7^n) \times 1000 + (-0,9^n + 2 \cdot 0,7^n) \times 100. \end{cases}$$

Puisque les suites $(0,9^n)$ et $(0,7^n)$ tendent vers 0, on en déduit que les suites (g_n) et (b_n) tendent toutes deux vers 0. Les espèces vont s'éteindre !

10. Par un calcul facile, on vérifie que $A - I_2$ est inversible et que

$$(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{40}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

On obtient $C = \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}$. Il suffit de faire le calcul ! Par exemple, la première ligne de V_{n+1} est

$$g_{n+1} - 500 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$$

et la première ligne de AV_n est

$$1,1g_n - 1,1 \cdot 500 - 0,2b_n + 0,2 \cdot 400 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470.$$

Comme dans la partie 1, on a $V_n = A^n V_0$ et les suites (x_n) et (y_n) tendent vers 0. Puisque $g_n = x_n + 500$, la suite (g_n) tend vers 500. De même, la suite (b_n) tend vers 400. Il suffit donc d'introduire 30 gardons chaque année pour arriver à des populations d'équilibre de 500 gardons et 400 brochets, ce qui est surprenant !

11. Par un calcul facile, on vérifie que $A - I_2$ est inversible et que

$$(A - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{50}{3} & \frac{20}{3} \\ -\frac{40}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

12. On obtient $C = \begin{pmatrix} -500 \\ -400 \end{pmatrix}$.

13. Il suffit de faire le calcul ! Par exemple, la première ligne de V_{n+1} est

$$g_{n+1} - 500 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470$$

et la première ligne de AV_n est

$$1,1g_n - 1,1 \cdot 500 - 0,2b_n + 0,2 \cdot 400 = 1,1g_n - 0,2b_n - 470.$$

14. Comme dans la partie 1, on a $V_n = A^n V_0$ et les suites (x_n) et (y_n) tendent vers 0.

15. Puisque $g_n = x_n + 500$, la suite (g_n) tend vers 500. De même, la suite (b_n) tend vers 400. Il suffit donc d'introduire 30 gardons chaque année pour arriver à des populations d'équilibre de 500 gardons et 400 brochets, ce qui est surprenant !

Correction de l'exercice 27 ▲

Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) & \theta_3(x_1) \\ \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) & \theta_3(x_2) \\ \theta_1(x_3) & \theta_2(x_3) & \theta_3(x_3) \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, les colonnes de cette matrice sont liées. Les lignes le sont donc aussi, et il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 = 0$. Ceci donne le résultat. La difficulté de cet exercice repose donc sur sa formulation un peu alambiquée, et aussi de sa position dans le problème (d'analyse) dont il est extrait.
